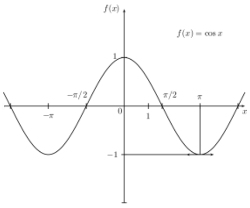
Par : **Jimmy PAQUEREAU**
Professeur particulier, *Completude*

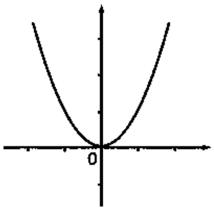
Fiche n° 4

Notions abordées :

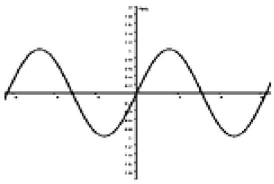
1) **Quelques définitions : parité, imparité, axe de symétrie, réciproque**

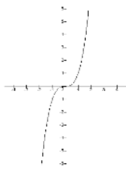
Qu’est-ce que la parité ? **Une fonction est dite paire si l’axe des ordonnées est un axe de symétrie de la sa courbe représentative** (exemples : ci-dessous et de gauche à droite, les fonctions respectivement cosinus et carrée).





Qu’est-ce que l’imparité ? **Une fonction est dite impaire si le centre du repère dans laquelle sa courbe représentative est tracée en est un centre de symétrie** (exemples : ci-dessous et de gauche à droite, les fonctions respectivement sinus et cube).





Parité et imparité (définitions formelles)

Il faut bien voir (faire un dessin) que les définitions formulées ci-après sont strictement équivalente à celles formulées ci-dessus.

$\mathbf{Soit}\ \boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$ **une application quelconque, on dit que** $\boldsymbol{f}$ **est paire ssi :** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
Ou encore ssi : $f(x) = -f(-x)$

On dit que $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$ **(se lit** $\boldsymbol{f}$ **de** $\boldsymbol{I}$ **dans** $\boldsymbol{J}$**) est impaire ssi :** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})$

Exemple : soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + b$ avec a et b réels fixés.
On a : $f(-x) = a(-x)^2 + b = ax^2 + b = f(x)$ d’où f est une fonction paire.
Autres exemples : la fonction sinus est impaire. La fonction cosinus est paire. Cette propriété des fonctions sinus et cosinus est admise en terminale. Une démonstration peut être formulée au moyen de la définition formelle de chacune de ces deux fonctions.

Axe de symétrie vertical

On se donne une droite verticale (d) du plan euclidien. L’équation de cette droite est donc de la forme : $(d) :\ x = a$ où $a \in \mathbb{R}$. Ci-après, on choisit a de telle sorte que $a \in I$.

$\mathbf{Soit}\ \boldsymbol{f}: [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] \to \boldsymbol{J}$ **une application quelconque,** $\boldsymbol{f}$ **admet** $(\boldsymbol{d})$ **pour axe de symétrie ssi :**
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}, \leq \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})$

Démonstration (immédiate) : soit $A\left(a-x\,;f(a-x)\right)$ et $B\left(a+x\,;f(a+x)\right)$ deux points de la courbe représentative de f exprimés dans le repère $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $O(0\,;0)$, $\vec{\imath}\binom{1}{0}$ et $\vec{\jmath}\binom{0}{1}$. On suppose qu'on a : $f(a-x)=f(a+x)$. Dans $\mathcal{R}'(O'\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ repère où $O'(a\,;0)$, qui n'est autre que $\mathcal{R}$ après translation d'un vecteur $\vec{t}\binom{a}{0}$, les points A et B s'écrivent désormais $A'\left(-x\,;f(-x)\right)$ et $B\left(x\,;f(x)\right)$. L'égalité précédente devient $f(-x)=f(x)$ dans $\mathcal{R}'$, i.e. la fonction f est paire dans $\mathcal{R}'$. Or l'axe des ordonnées dans $\mathcal{R}'$ admet pour équation $x=a$ dans $\mathcal{R}$. CQFD.

Exemple : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ avec a,b et c réels fixés.
Montrons que f possède un axe de symétrie verticale.
On se donne une droite : Soit $e\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R},\ (d):\ x=e$.
Par définition, (d) est axe de symétrie de f ssi :
$\forall x\in\mathbb{R},\qquad a(e+x)^2+b(e+x)+c=a(e-x)^2+b(e-x)+c$
$\Rightarrow\ ae^2+2eax+ax^2+be+bx+c=ae^2-2eax+ax^2+be-bx+c$
$(\cancel{ae^2}+2eax+\cancel{ax^2}+\cancel{be}+bx+\cancel{c}=\cancel{ae^2}-2eax+\cancel{ax^2}+\cancel{be}-bx+\cancel{c})$
$\Rightarrow\ 4eax+2bx=0$
$\Rightarrow\ e=-\frac{2bx}{4ax}=-\frac{b}{2a}$ CQFD
On vérifie aisément que : $f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=f(-\frac{b}{2a}-x)$.

Nota bene

L'étude des symétries quelconques du plan ou d'un espace euclidien sont très largement hors programme de terminale (patience). On notera toutefois que toute étude de la symétrie d'une courbe d'un plan euclidien peut être ramenée à l'étude d'une symétrie verticale d'un plan euclidien.

Centre de symétrie quelconque

On se donne un point $A(a\,;0)$ du plan euclidien.

(i) **Soit $f:[i,j]\to J$ une application quelconque, f admet A pour centre de symétrie ssi :**
$\forall x\in\mathbb{R}/i\le a+x,\le j,\qquad f(a+x)=-f(a-x)$

On se donne un point $A(a\,;b)$ du plan euclidien.

(ii) **Soit $f:[i,j]\to J$ une application quelconque, f admet A pour centre de symétrie ssi :**
$\forall x\in\mathbb{R}/i\le a+x,\le j,\qquad f(a+x)-b=b-f(a-x)$

Démonstrations : une fois de plus, un changement de repère fait apparaître le résultat.

(ii) Soit f dans le repère $\mathcal{R}(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $O(0\,;0)$, $\vec{\imath}\binom{1}{0}$ et $\vec{\jmath}\binom{0}{1}$. Et soit $\mathcal{R}'(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ repère où $A(a\,;b)$, i.e. $\mathcal{R}$ par la translation de vecteur $\vec{t}\binom{a}{b}$.
$f(a+x)-b=b-f(a-x)$ dans $\mathcal{R}$ donne dans $\mathcal{R}'$:
$f(a+x-a)+b-b=f(x)=b-(f(a-x-a)+b)=-f(-x)$.
CQFD.

(ii) $\Longrightarrow$**(i)** (en effet, **(i)** correspond au cas $b=0$).

2) **Formules complémentaires sur les dérivées**

Définition d'une fonction composée

Soient I, J et K trois ensembles quelconques et soient $v : I \to J$ et $u : J \to K$.
On appelle fonction composée de u et v, l'application noté $u \circ v$, définie par :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \qquad (\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))$$

Si on se donne deux applications $v : M \to N$ et $u : O \to P$, $u \circ v$ est définie sur $N \cap O$.

Exemple : on note $I =]-\infty\,; -1] \cup [1\,; +\infty[$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$
On a : $\forall x \in I,\ f(x) = u\big(v(x)\big) = (u \circ v)(x)$ en posant :
$\forall X \in \mathbb{R}^+,\ u(X) = \sqrt{X}$ et $\forall x \in I,\ v(x) = x^2 - 1$
Il faut bien comprendre que f n'est pas définie sur $]-1; 1[$. En effet, $v(]-1; 1[) =]-1; 0[$. Or u n'est pas définie sur $]-\infty; 0[$ et à *fortiori* sur $]-1; 0[$. D'où $u \circ v$ n'est pas définie sur $]-1; 0[$, mais bien sur I.

Théorème de la dérivation des fonctions composées

Soient $v : M \to N$ et $u : O \to P$ deux applications quelconques où u est dérivable sur I et v sur J. Alors $u \circ v$ est dérivable sur $N \cap O \cap I \cap J$.

En d'autres termes : $u \circ v$ est dérivable pour tout x tel que v est définie dérivable en x, u est dérivable en $v(a)$.

Et l'on a : on note E l'ensemble de dérivabilité de $u \circ v$.

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \qquad (\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v})'(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{v}'.(\boldsymbol{u}' \circ \boldsymbol{v})\big)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))$$

Exemple : Soit $f : I \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$
On a : $\forall x \in I,\ f(x) = u\big(v(x)\big)$ en posant : $\forall X \in \mathbb{R}^+,\ u(X) = \sqrt{X}$ et $\forall x \in I,\ v(x) = x^2 - 1$
u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. On note $I' =]-\infty\,; -1[\cup]1\,; +\infty[$. v est définie dérivable sur I' et $v(I') = \mathbb{R}_*^+$.
D'où f dérivable sur I'.
De plus : $\forall X \in \mathbb{R}_*^+,\ u'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ et $\forall x \in I',\ v'(x) = 2x$
Finalement : $\forall x \in I', f'^{(x)} = v'(x)u'^{(v(x))} = 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Démonstration : soient I, J et K trois ensembles quelconques et soient $v : I \to J$ et $u : J \to K$ avec u application dérivable en $x_0 \in J$. Il existe $y \in I$ tel que $v(y) = x_0$. On choisit x_0 tel que v soit dérivable en y.

On se donne $\forall x \in J,\ \varepsilon(x) = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} - u'(x_0)$.

Alors, par définition du nombre dérivé: $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)$

Et donc $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

On peut écrire : $u(x) - u(x_0) = \big(\varepsilon(x) + u'(x_0)\big)(x - x_0)$

On en déduit : $(u \circ v)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\varepsilon(v(x)) + u'(v(x_0))\right)(v(x) - v(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} u'(v(x_0)) \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \quad \textit{(puisque } \varepsilon(v(x)) \textit{ tend vers 0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} u'(v(x_0)) v'(x_0)$$

Définition d'une fonction réciproque

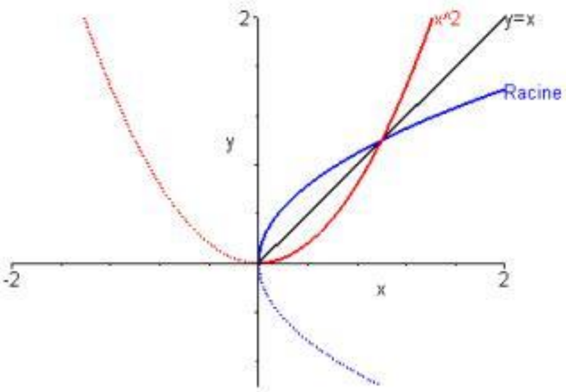
Soit $f : I \to J$ une fonction quelconque, sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est la fonction telle que :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{f^{-1}(f(x)) = x}$$

Bien remarquer ceci : si on note $y = f(x)$, on a $x = f^{-1}(y)$. Autrement dit, f est plus ou moins aux ordonnées ce que f^{-1} est aux abscisses. Ce n'est qu'une symétrie ! (par la première bissectrice).

N.B. : comme à l'accoutumée, on fait bien attention aux ensembles de définition et aux ensembles d'arrivée.

Exemple : à droite, on observe, en rouge, la courbe représentative de la fonction carrée, et, en bleu, celle de sa réciproque, la fonction racine carrée.
On remarquera que ces deux courbes sont symétriques par la première bissectrice (i.e. la courbe représentative de la fonction identité, à savoir $\forall x \in \mathbb{R},\ (d) : f(x) = x$). Cette propriété est applicable à toute fonction et sa réciproque.
Et l'on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}^+, u(x) = x^2, v(x) = \sqrt{x}$
$v(u(x)) = \sqrt{x^2} = u(v(x)) = \sqrt{x}^2 = x$



On notera bien que ce qui précède est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et non sur $\mathbb{R}$ tout entier. Une racine réelle négative, ça n'existe pas !

Une fonction du plan et sa réciproque sont symétriques par la première médiatrice.

Autres exemples : sin^{-1} et cos^{-1}, fonctions que l'on retrouve sur la calculatrice, sont les réciproques respectivement de sin et cos. Plus communément, sin^{-1} et cos^{-1} sont notées respectivement $arcsin$ ou $asin$ et $arccos$ ou $acos$. Voilà le sens de ces mystérieuses fonctions !
e^x est la réciproque de $\ln(x)$. C'est même la définition de l'exponentielle.

Définition d'une fonction réciproque

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $f'(I) = J$, sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{f^{-1'}(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

N.B. : une fois de plus, on fait très attention aux ensembles de définition et aux ensembles d'arrivée.

Démonstration : celle-ci découle de la définition d'une réciproque et du théorème de dérivation des fonctions composées.

En effet : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
$\forall x \in I, (f \circ f^{-1})'(x) = f^{-1'}(x) f'(f^{-1}(x))$ *par application du théorème de dérivation des fonctions composées*
$\Rightarrow \forall x \in I, f^{-1'}(x) = \ (f \circ f^{-1})'(x) = \dfrac{(f \circ f^{-1})'(x)}{f^{-1'}(x) f'(f^{-1}(x))}$
Par ailleurs, pour tout x de I, on a de manière évidente $(f \circ f^{-1})'(x) = 1$ puisque $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
Cependant, on peut le vérifier $(f \circ f^{-1})'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$
En somme, on a bien $(f \circ f^{-1})'(x) = \frac{(f \circ f^{-1})'(x)}{f^{-1'}(x) f\prime(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f^{-1'}(x) f\prime(f^{-1}(x))}$

Exemple : (incontournable)

On répond à la question « quelle est la dérivée de la réciproque de sin ? ». On note $arcsin$ la réciproque de sin. $arcsin$ fait partie de ce qu'on appelle les fonctions circulaires réciproques, les fonctions circulaires étant entre autre sin, cos et tan.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, sin'(x) = \cos(x)$, et $cos(\mathbb{R}) = [-1; 1]$. D'où, $arcsin$ dérivable sur $[-1; 1]$.
Par conséquent : $\forall x \in [-1; 1],\ arcsin'(x) = \frac{1}{cos(arcsin(x))}$.
Or, on se rappelle que pour tout réel X, $\cos^2(X) + sin^2(X) = 1$, et donc $\cos(X) = \sqrt{1 - sin^2(X)}$
Conclusion, $\forall x \in [-1; 1],\ arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(arcsin(x))\sin(arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Fonction	Ensemble de définition	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$\mathbb{R}$
$tan(x)$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} \ mod \ \pi\right\}$	$1 + tan^2(x) = \dfrac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R}$
$arcsin(x)$	$[-1; 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$]-1; 1[$
$arccos(x)$	$[-1; 1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$]-1; 1[$
$arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$	$\mathbb{R}$

Idée de moyen mnémotechnique : retenir « sin cos cos moins sin » ou « sicocomos »
$\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} \ mod \ \pi\right\}$ signifie $\mathbb{R}$ privé de $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$… (l'opérateur $\backslash$ correspond à la différence ensembliste, i.e. un ensemble moins un autre).

3) **Démonstration des dérivées des fonctions usuelles**

Comme très souvent en mathématiques, un résultat est le fruit d'une définition. On ne démontrera pas toutes les dérivées usuelles. Mais les plus usuelles découlent directement de la définition du nombre dérivé. Elles découlent ensuite les unes des autres. Comme les précédentes démonstrations, il faut avant tout en retenir les principes et méthodes utilisées, la rigueur également.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$

Démonstration : le taux d'accroissement de f s'écrit $\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$
Le taux d'accroissement de f est donc bien défini pour $h = 0$ et pour tout x réel, d'où f dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{n\to\infty} 2x + h = 2x$$

- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$

Démonstration : ça pique un peu plus mais le principe est toujours le même.
On rappelle (ou on apprend, au choix) que :
$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall k \in \mathbb{N}\ k < n, \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},\ \binom{n}{1} = n \Rightarrow \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

On écrit le taux d'accroissement de f dont on vérifie bien qu'il est défini pour tout réel.

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} x^k h^{n-k}\right) - x^n}{h} = \frac{\binom{n}{n} x^n h^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} x^k h^{n-k}\right) - x^n}{h}$$

$\binom{n}{n} x^n h^{n-n} = x^n$, ce qui nous permet de simplifier une première fois ce quotient un peu frustre.

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} x^k h^{n-k}}{h}$$

Maintenant, comme dans le cas de la dérivée de la fonction carrée, on factorise le numérateur par h.

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{h\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}}{h} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}$$

Si on en reste là, on aurait presque l'impression que le taux de variation tend vers 0 quand *h* tend vers 0. Or, non, puisque pour $k = n-1$, la puissance de h disparaît.

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \binom{n}{n-1} x^{n-1} h^{n-(n-1)-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}$$

Or $\binom{n}{n-1} x^{n-1} h^{n-(n-1)-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} h^0 = nx^{n-1}$
Sayez ! On y est.

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} = 0$$

Finalement, le taux de variation est bien défini pour tout réel et donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = f'(x) = nx^{n-1}$

On ne démontrera pas toutes les autres formules sur les dérivées, la précédente démonstration ayant été bien assez pompeuse comme cela. Voici toutefois comment procéder en vue de démontrer quelques-unes des autres formules sur les dérivées. Quoiqu'il en soit, il peut être intéressant de s'essayer à les démontrer en guise d'entraînement !

- Dérivée d'une somme : écrire le taux de variation. Le résultat est immédiat.
- Dérivée d'un produit : écrire le taux de variation. Utiliser alors un procédé habituel, à savoir ajouter puis retrancher la même quantité (par exemple $u(x)v(x_0)$). Cet ajout se fait bien entendu au numérateur. Séparer le quotient en une somme de deux quotients. Un petit calcul de limite et il ne reste plus qu'à conclure (demander pour avoir la démonstration complète).
- Dérivée d'un quotient : un quotient n'est-il pas une multiplication ?
- Dérivée d'exponentielle : se rappeler que c'est la réciproque du logarithme népérien (encore appelé logarithme naturel).
- Dérivée d'un logarithme composé ou d'une exponentielle composée : qui a dit composé ? Donc par application du théorème de la dérivation des fonctions composées.
- Dérivée des fonctions circulaires réciproques : comme avec $arccos$ et en utilisant les formules sur les sin, cos et tan.
- Dérivée des fonctions circulaires : utiliser les formules sur les sin, cos et tan et bien se rappeler (ou apprendre) que $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$.

4) **Introduction aux notions de limite et de continuité**

Qu'est-ce qu'une limite ? On en parle, on les utilise, mais enfin, c'est quoi ? Comme son nom l'indique, c'est une limite… Elle s'applique à une fonction quelconque en un point quelconque de sa courbe représentative. Et c'est ni plus ni moins que la notion qui répond à la question « que fait la fonction lorsqu'une variable, souvent l'abscisse, se rapproche toujours d'une valeur particulière ? ». En d'autres termes, une limite décrit le comportement d'une fonction par exemple quand son abscisse se rapproche infiniment d'une certaine valeur (un certain x_0 pourquoi pas) ou encore lorsque l'abscisse devient infiniment grand ($\pm\infty$) ou infiniment petit ($0, 0^+$ ou 0^-).

Qu'est-ce que la continuité ? Une fonction est dite continue si, avec un crayon, l'on peut dessiner sa courbe représentative d'un seul tenant. Et l'on peut justement formaliser ce concept au moyen de la notion de limite.

Qu'est-ce qu'une asymptote ? Une asymptote est une droite. On parle d'asymptote d'une courbe si, à l'une quelconque de ses extrémités tendant vers $\pm\infty$, la courbe tend à longer cette droite en s'en rapprochant toujours plus. Autrement dit, autour de cette extrémité, la courbe tend à se comporter comme une droite. On parle de comportement asymptotique. Et ce « autour » est qualifié de voisinage.

Donnons à présent des définitions quelque peu plus formelles qui ne font que traduire ce qui précède.

Définition d'une limite finie et infinie

Soit $f : I \to J$ avec $I \subseteq \mathbb{R}, J \subseteq \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Soient $a \in I$ et $l \in J$.

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ssi, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists \delta \in \mathbb{R}_*^+ / \forall x \in I,\ |x - a| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$

(l'inégalité est équivalente à $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$)

Ceci traduit le fait qu'on puisse trouver un point de coordonnées $(x, f(x))$ aussi proche que l'on veut du point de coordonnées (a, l), ce dernier point n'appartenant pas forcément à la courbe représentative de f. Cette limite décrit donc le comportement de f autour du point de coordonnées (a, l). Et il faut comprendre cette définition formelle de la manière suivante : une fonction de x tend vers l en a si, pourvu que x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de l. Autrement dit, pourvu qu'on prenne x suffisamment proche de a, $f(x)$ devient toujours plus proche de l.

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ssi, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}_*^+ / \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \Rightarrow\ f(x) \geq \varepsilon$

Ceci traduit le fait que, pourvu qu'on prenne x suffisamment proche de a, alors $f(x)$ devient toujours plus grand.

On dit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ssi, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}_*^+ / \forall x \in I,\ x \geq \delta \Rightarrow\ f(x) \geq \varepsilon$

Ceci traduit le fait que, pourvu qu'on prenne x suffisamment grand, alors $f(x)$ devient toujours plus grand.

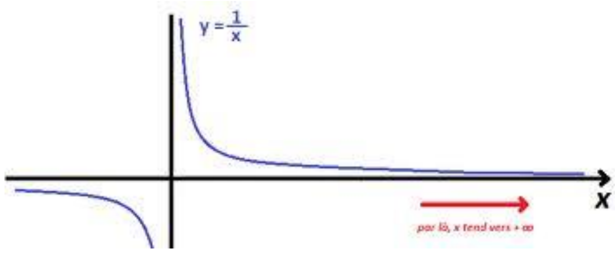
On peut formuler une définition similaire dans les aux autres cas (limite infinie en $-\infty$ ou finie en $\pm\infty$) ou encore proposer une définition plus générale.

On a coutume de noter $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $[-\infty; +\infty]$. Soit $f : I \to J$ avec $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ et soient $a \in I$, $l \in J$ et $\mathcal{V}$ un voisinage* de a.

On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ssi, $\exists\ \mathcal{V} / \forall x \in I,\ x \in \mathcal{V} \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$

*Un voisinage $\mathcal{V}$ de a signifie un intervalle centré a aussi petit qu'on le veuille.

Exemple : prenons la fonction inverse. Que se passe-t-il en $+\infty$? Très simplement, l'image par la fonction tend vers 0. On l'observe ! Et on écrit : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Mieux encore, en partant de la définition, on le prouve en un instant :



$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} = f(x) - 0 < \varepsilon$$

De même, prenons la fonction carrée tend de manière évidente vers $+\infty$ en $+\infty$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in \mathbb{R}, x + \varepsilon > \varepsilon \Rightarrow (x + \varepsilon)^2 > \varepsilon$$

Définition de la continuité

Une fois bien compris ce qu'est une limite, la définition de la continuité ne pose pas franchement de problème. **Une fonction de x définie en a est continue en a si, au voisinage de a, $f(x)$ tend vers $f(a)$**. Ce qui se traduit également par :

Soit $f : I \to J, a \in I, x \in I, f$ est continue en a ssi : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Propriété

Soit f une fonction dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration : encore et toujours par la définition du nombre dérivé…

Soit f une fonction dérivable en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

On remarquera qu'on retrouve l'équation de la tangente en x_0, ce qui n'est pas étonnant, puisque, en fait, la tangente n'est rien d'autre que la droite qui approche le mieux la courbe en x_0. Dit autrement, au voisinage de x_0, la courbe se comporte comme la tangente. Mais continuons.

Or $\lim_{x \to x_0} x - x_0 = 0$ et donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions quelconques définies sur I et soient $a \in I$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Si : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
Et si : $y \in I,\ \lim_{y \to a} f(y) = \lim_{y \to a} h(y) = l$,
Alors : $\lim_{y \to a} g(y) = l$

Ce qu'on peut écrire de manière plus concise encore :
$\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow (y \in I, \lim_{y \to a} f(y) = \lim_{y \to a} h(y) = l \Rightarrow \lim_{y \to a} g(y) = l)$

N.B. :
Si $a = +\infty$: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow (\lim_{y \to a} f(y) = +\infty \Longrightarrow \lim_{y \to a} g(y) = +\infty)$
De même, si $a = -\infty$: $f(x) \geq g(x) \Rightarrow (\lim_{y \to a} f(y) = -\infty \Longrightarrow \lim_{y \to a} g(y) = -\infty)$

Ce théorème demeure plutôt intuitif. Au voisinage d'un point, une fonction se fait serrer par deux gendarmes. Oppressée, elle est bien obligée de les suivre pour se diriger vers leur limite l… Au passage, ces deux dernières phrases correspondent bien à la manière dont on démontre ce théorème.

5) **Limites usuelles et notion d'asymptote**

Dans cette partie, on retrouve les limites usuelles et les formules les plus communes concernant celles-ci. Hormis quelques cas, cela n'a aucun sens de chercher à mémoriser ces formules ! Il faut plutôt s'interroger sur la provenance de celles-ci. Si l'on comprend de quoi elles retournent (à savoir de la notion même de limite), on les retrouve immédiatement. Alors non, il ne faut pas les apprendre ! Il faut les comprendre !

On remarquera également que, en ce qui concerne les limites usuelles, le seul fait d'observer la courbe d'une fonction à la calculatrice nous permet le plus souvent de supposer quelles sont ses limites.

Limites usuelles

Fonction	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en +∞
$a \in \mathbb{R}_*^+, (b,c) \in \mathbb{R}$ $ax^2 + bx + c$	$+\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$a \in \mathbb{R}_*^-, (b,c) \in \mathbb{R}$ $ax^2 + bx + c$	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$-\infty$
$n, k \in \mathbb{N}^*, n = 2k$ x^n	$+\infty$	0	$+\infty$
$n, k \in \mathbb{N}^*, n = 2k + 1$ x^n	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0^-	Indéfinie *limite à gauche :* $-\infty$ *limite à droite :* $+\infty$	0^+
$\sqrt{x}$	Indéfinie	0^+	$+\infty$
e^x	0^+	1	$+\infty$
$ln(x)$	Indéfinie	Indéfinie *Limite à droite :* $-\infty$	$+\infty$
$\frac{e^x}{x}$	0^-	Indéfinie *limite à gauche :* $-\infty$ *limite à droite :* $+\infty$	$+\infty$
$\alpha \in \mathbb{R}$ $x^\alpha e^x$	0	Différents cas	$+\infty$
$\frac{ln(x)}{x}$	Indéfinie	Indéfinie *Limite à droite :* $-\infty$	0^+

Opération sur les limites

$\lim_{x \to x_0} u(x)$	$\lim_{x \to x_0} v(x)$	$w(x)$	$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, \lim_{x \to x_0} w(x)$
$m \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{R}$	$u(x) + v(x)$	$m + n$
$m \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{R}$	$u(x)v(x)$	mn
$m \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{R}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{m}{n}$
----	$n \in \overline{\mathbb{R}}$	$(u \circ v)(x)$	$\lim_{x \to v(x_0)} u(x)$
$m \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$u(x) + v(x)$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)
$+\infty$	$-\infty$	$u(x) + v(x)$	Forme indéterminée
$m \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$u(x)v(x)$	$+m\infty$ (resp. $-m\infty$)

$m \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{R}$	$u(x)v(x)$	mn
0	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$u(x)v(x)$	Forme indéterminée
$m \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$\frac{u(x)}{v(x)}$	0
$m \in \overline{\mathbb{R}}^*$	0^+ (resp. 0^-)	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$+m\infty$ (resp. $-m\infty$)
$m \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{R}^*$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{m}{n}$
0	0	$\frac{u(x)}{v(x)}$	Forme indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	Forme indéterminée

<u>Asymptote</u>

Plus avant, nous donnions une définition sommaire de ce qu'est une asymptote. Une définition possible d'une asymptote en $\pm\infty$ d'une fonction f définie dérivable sur un ensemble $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ est qu'il s'agit de la tangente en $\pm\infty$ si elle existe. Malheureusement, cette définition n'est pas formellement correcte. Cela reste une image convenable pour l'esprit.

Définition

Soit f une fonction définie en $\pm\infty$. f admet une asymptote en $\pm\infty$ ssi

$$\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R} \ / \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

Propriété

Soit a, b $\in \mathbb{R}$. Si f admet une asymptote en $\pm\infty$ de la forme $(\mathcal{A})$: $y = ax + b$, alors :

$$\mathbf{a} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$$

Exemple : soit la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$. Montrons que cette fonction admet une asymptote en $+\infty$.

Méthode 1 (rapide) : $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 + x + 2}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$ (puisqu'en $+\infty$, les monômes de degré inférieur à 3 sont négligeables face à ceux de degré 3.
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 - 1} - 2x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{2x^3} - x^2 + x + 2 - \cancel{2x^3} + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$
D'où f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$

Méthode 2 (élégante) : cette méthode est hors programme, cependant, dans les sujets du bac, il arrive que l'élève, accompagné, suive cette méthode sans s'en rendre compte et, d'ailleurs, sans y prêter attention. f est une fraction rationnelle (i.e. le quotient de deux polynômes). Un lecteur averti remarquera qu'elle décomposable en éléments simples de manière évidente.

$2x^3 - x^2 + x + 2 = (2x-1)(x^2-1) + 3x + 1$
(c'est une division euclidienne, version polynômes)
Et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
Alors $\exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x + 2}{x^2-1} = \frac{3x+1}{x^2-1} + 2x - 1 = \frac{a}{x-1} + \frac{\mathrm{b}}{x+1} + 2x - 1$
Finalement, qu'importe a et b, en $+\infty$, les deux premiers termes tendent vers 0. CQFD.

Curiosité : $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{x^2-1}$ *d'où, par identification,* $a + b = 3$ *et* $a - b = 1$*. On résout le système et l'on obtient* $a = 2$ *et* $b = 1$*. Ce qui nous donne une nouvelle expression de* $f(x)$*. Quel intérêt ? Il devient alors facile d'intégrer la fonction (voir fiche sur les intégrales), d'étudier ses limites remarquables, ses asymptotes. Il y a bien d'autres utilités à l'étude des fractions rationnelles, celles-ci relevant des études supérieures.*